Rudolf Steinerhøyskolen

Bacheloroppgave

3. år lærerlinjen

Innleveringsdato: 27.04.2010

Matematikkundervisning på Steinerskolen

Hvordan innføres elementær algebra og kan innføringen av algebra være en ny vei inn i matematikken? Er det en sammenheng mellom utviklingen av tenkningen og Steinerskolens læreplan i matematikk?

Tobias Walter

Bånntjernveien 19

3514 Hønefoss

e-post: tobiasjohanneswalter@gmail.com

mobil: 41482091

Forord

Tall har for meg en usynlig skjønnhet! Jeg syns at matematikk kan være et virkelig spennende felt og man kan gjøre mye mer enn bare abstrakt og realitetsløs undervisning. Matematikk er noe vi møter overalt og hvis vi som lærere kan bygge opp et bra forhold til det, er interessert i å formidle det på en spennende og betydningsfull måte, så kan vi også vekke noe i elevene, som kanskje har en større avstand til tall enn andre. Slik at også de kan undre seg og etterhvert bli mer begeistret for dette faget. Ut fra det oppsto min motivasjon for å behandle matematikk som tema i min bacheloroppgave.

Jeg vil takke *Kristina Oehmichen* for hennes hjelp, støtte og rådgiving gjennom hele oppgaveskrivingen. En hjertelig takk vil jeg også gi til *Ellen Fjeld Køttker* for utmerket veiledning som min mentor i hele prosessen med denne bacheloroppgaven. Også *Ann Høydalsnes* takker jeg hermed veldig for korrekturlesning og retting av denne oppgaven.

Innhold

1. Innledning.. 1

2. Viktige elementer for forståelsen av elementær algebraundervisning.. 2

2.1 Alderstypiske trekk ved det 12-13-årige barnet.. 2

2.2 Tenkningens utvikling.. 4

2.3 Algebra i historisk sammenheng.. 6

3. Innføring av algebra.. 9

3.1 Nødvendige forkunnskaper.. 10

3.1.1 Sansene i forhold til matematikk.. 10

3.1.2 Naturlige tall.. 12

3.1.3 De fire regnearter.. 12

3.1.5 Brøkregning.. 13

3.2. Renteregning.. 14

3.3 Elementær algebra.. 16

3.3.1 Matematikkens historie i undervisning.. 20

4. Algebra som en ny vei inn i matematikken.. 20

5. En sammenligning mellom læreplanen i den offentlige skolen og Steinerskolen.. 22

6. Konklusjon.. 24

Kilder.. 26

1. Innledning

Matematikk er en måte vi kan forklare og forstå verden på ved å finne strukturer i det som er eller ennå ikke er blitt forstått. Tall er ikke fysiske, men fremstiller en måte å strukturerer virkeligheten på. Derfor er matematikken en grunnleggende ferdighet for å skape, oppdage eller forstå noe. Hvis vi går ut i verden, kan vi oppleve at nesten alt som er omkring oss har et mønster, en struktur. Dette gjelder ikke bare jorden, men hele universet. Men først kan vi ta utgangspunkt i mennesket: ett hode, to armer, to hender, ti fingre osv. Vi ser en struktur som gjelder mange mennesker. Der tar vi utgangspunkt i den første matematikkundervisningen på Steinerskolen. Barna bør oppleve tilknytningen mellom tallenes verden og seg selv, og se det i forhold til sine omgivelser. Bruken av konkrete bilder eller eksempler ut fra naturens lovmessigheter skaper en identifikasjon mellom barnet og tallene som kvaliteter (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 92). Gjennom den videre matematikkundervisningen blir elevene kjent med eller oppdager disse lovmessighetene og lærer seg regneregler for de forskjellige områdene. Alt det som elevene lærer i en begynnerfase, møter de igjen i algebraundervisning som begynner i 7. klasse. Her er det viktig å nevne at all undervisning selvfølgelig bygger på forkunnskaper. Slik er det også med matematikk. Vi kunne ikke regnet ut en algebraisk likning, hvis vi for eksempel ikke kunne regne med de fire grunnleggende regneartene. Men det som er spesielt med algebra, er at vi i første omgang bare abstraherer noe vi har lært før. Dette kan eventuelt være et nytt skritt inn i matematikken for elever som tidligere ikke har evnet å følge med.

Gjennom matematikken øver vi oss på å tenke, vi øver opp fleksibilitet i tenkningen og også evnen til beslutningskraft. Utvikling av tenkningen er svært viktig for en videre forståelse og motivasjon for matematikkundervisningen. Den abstrakte tenkningen utvikles, og med hjelp av algebra blir vi kjent med en mer forstandsmessig og generaliserende side av matematikken.

Jeg har følgende tema og problemstilling for min bacheloroppgave: *"Matematikkundervisning på Steinerskolen – Hvordan innføres algebra og kan innføringen av algebra være en ny vei inn i matematikken? Er det en sammenheng mellom utviklingen av tenkningen og Steinerskolens læreplan i matematikk?*

I arbeidet med dette temaet kom jeg til følgende hoveddeler som er vesentlig for temaet: Først vil jeg belyse alderstypiske trekk for det klassetrinnet hvor elementær algebra innføres, 7. klasse, det vil si 12-13-åringen. Kan man se fellestrekk hos et ungt menneske i akkurat denne alderen, og hva vil det innbære for undervisningen og forståelsen? Hvordan tenker et barn på

12-13 år? Hvordan utvikler tenkningen seg på dette alderstrinnet? Jeg tar utgangspunkt i en steinerpedagogisk synsvinkel. Videre skal jeg belyse tenkningens utvikling ifølge Jean Piaget, for så å komme til algebraens historiske utvikling og forsøke å se sammenhenger mellom matematikkens historie og utviklingen av tenkningen. Neste kapittel, som utgjør hoveddelen av bacheloroppgaven, handler om innføringen av algebra i 7. klasse. Først vil jeg redegjøre for de nødvendige forkunnskapene og selve kunnskaps- og ferdighetsveien til elementær algebra. Deretter skal jeg behandle spørsmålet mitt: ”Kan innføringen av algebra være et nytt skritt inn i matematikken?” I det siste kapittelet skal jeg sammenligne og sammenholde noen vesentlige punkter fra læreplanen i den offentlige skolen og Steinerskolens mål og planer for dette faget. Avslutningsvis vil jeg komme til en klargjørende konklusjon. Alt som nå er nevnt i denne innledningen, fremstår for meg som essensielle og grunnleggende momenter for å svare på problemstillingen.

2. Viktige elementer for forståelsen av elementær algebraundervisning

På de følgende sider skal jeg beskrive barnets kognitive forutsetninger for elementær algebraundervisning og forklare barnets modenhetsnivå. Dette er etter min mening viktige momenter for en videre forståelse av dette temaet. Selvfølgelig kan jeg ikke gå i detalj når det gjelder utviklingen av mennesket, men jeg vil fremholde essensielle punkter for forståelsen av temaet. Deretter skal jeg se på noen vesentlige elementer i forhold til matematikkens utvikling.

2.1 Alderstypiske trekk ved det 12-13-årige barnet

I dette kapittelet vil jeg hovedsakelig referere til Erik Marstranders bok *Matematikk og geometri* (2003), der han gir en kort, men en god beskrivelse av dette alderstrinnet. Her skal jeg ikke gå inn på det fysiske, men legge fokus på det kognitive som er relevant for denne oppgaven.

Hvis vi ser helt generelt på barnet i 12-13-årsalderen, kan vi si at det har nådd et nivå i utviklingen hvor ”barndommen er over og barndomskreftene er slutt” (Marstrander, 2003, s. 11). Ungdommen og den medfølgende puberteten begynner eller nærmer seg i hvert fall. Med barndomskreftene som nevnes her menes hovedsaklig fantasi- og forestillingsevnen, som står i nær kontakt med tenkningen og har stor betydning for utviklingen av mennesket. Fantasikreftene som preger tankelivet mest i de første sju til åtte leveårene, blir etter hvert forvandlet til en abstraksjonsevne. Erik Marstrander sier: ”Evnen til å utrykke sine tanker baserer seg på at noe er kommet til ro” (Marstrander, 2003, s. 7). Med dette viser han til barnets første egne tankegang, som forekommer omtrent ved treårsalderen og er basert på at barnet har lært å gå og snakke. Men denne ”roen” kan vi etter min mening også videreføre til utviklingen av abstraksjonsevnen i 12-13-årsalderen. I og med at følelses- og fantasilivet i forhold til tenkningen tar slutt, skapes det rom for en videre utvikling og en mer abstrakt og ren tenkning. Vi kan altså si at verden blir ”livløs”, noe som betyr at fantasiverdenen omdannes til en mer tanke- og realitetsbasert arena, hvor for eksempel en kvist blir en kvist og kan ikke forvandles til noe annet. Dette danner et grunnlag for abstrakt tenkning. Erik Marstrander skriver i denne forbindelse at ”tenkningen (beveger) seg fra å være en levende tilstand til å bli et dødt redskap” (Marstrander, 2003, s. 9). Dette er altså karakteristisk for barnet, eller mer korrekt ”ungdommen”, i 12-13-årsalderen.

Ut fra dette jeg nå har beskrevet, skjer det mye i det oppvoksende barnet. I forbindelse med forandringene som preger mennesket i denne livsfasen der verden oppleves noe annerledes, skjer det også mye i forhold til Steinerskolens læreplan. Arbeidet med ”årsak og virkning” kan tilskrives en viktig rolle i denne sammenhengen. Det synliggjøres i for eksempel eksperimenter i fysikk og kjemi, men også i matematikk. Det forutsetter en evne til refleksjon og abstrakt tenkning. I flere forskjellige fag introduseres nye emner som uten denne utviklingen i barnets abstrakte tenkning ikke kunne blitt innført. I Steinerskolens læreplan *Idé & innhold* står det: ”Evnen til å tenke abstrakt gir større frihet og åpenhet i erkjennelsen.” (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 24.) Det vil si at elevene særlig i denne alderen øver seg i ”abstraksjon” på forskjellige plan for å få til en frigjøring av tenkningen. Denne tenkningen oppøves mest i matematikkfaget (Marstrander, 2003, s. 10), der algebraen definerer et område som krever abstrakt tenkning og fører elevene fra en konkret livssituasjon til en abstrakt og dermed også generaliserende matematisk forståelse. En fordypende fremstilling av dette kommer senere, i kapittel 3.

2.2 Tenkningens utvikling

I det følgende skal jeg gi et innblikk i den kognitive utviklingen av mennesket ifølge Jean Piaget. Dette står etter min mening i sammenheng med abstraksjonsevnen og er derfor essensielt i forhold til innføringen av algebra, som er hovedtema for denne oppgaven.

Aktiviteten "tenkning" står ganske nær begrepene intelligens og kunnskap. Ut fra det forrige kapittelet kan vi også forstå at tenkningen kan føre til en viss grad av frihet. Men hva er det egentlig, og hvordan utvikles det? På den ene siden er det noe vi kan tilegne oss, på den andre siden finnes det noe som tilsvarer en naturlig gitt logikk som utvikles av seg selv, eller automatisk. Dette kaller vi instinkt, og det utvikler seg ut fra organene. Jean Piaget mener at "Instinktet er organernes logik, (..)" (Piaget, 1973, s. 170). Hvis vi ser på utviklingen av det kognitive, altså tenkningen, kan vi fastslå at det begynner allerede i spedbarnsalderen. Dette beskriver Jean Piaget i sin teori om kognitiv utvikling i form av fire forskjellige stadier. En fremstilling av dette følger nedenfor. I forbindelse med det må jeg også nevne at mennesket ifølge Piaget streber etter en tilpasning til omgivelsene. Det kaller han *"adaptasjon*". Adaptasjon er et fellesbegrep for *"assimilasjon*" og *"akkomodasjon*" (Furth, 1981, s. 29–31), som jeg skal forklare i det følgende:

Assimilasjon betyr at mennesket prøver å tilpasse omgivelsene til seg selv.

Akkomodasjon innebærer at mennesket tilpasser seg selv til omgivelsene.

Det er en aktivitet som ligger bak dette, og gjennom denne aktiviteten lærer mennesket. Tar vi dette videre, ser vi at vi aktiviserer en tankeprosess gjennom all læring. Går vi tilbake til det som ble sagt som utgangspunkt, er det også lett å tenke seg at den kognitive utviklingen er til stede nesten helt fra begynnelsen av. I og med at vi er i aktivitet, om det er bevisst eller ubevist, blir denne prosessen igangsatt. På grunnlag av dette laget Piaget en modell som framstiller denne utviklingen av det kognitive. Nedenfor følger et kort resymé av de vesentlige utviklingsfasene slik Jean Piaget beskriver dem, samt deres typiske karakteregenskaper:

Fase	Alder	Typiske aktiviteter
Sensomotorisk	0–2	Sansning, gjenkjennelse, koordinasjon
Preoperasjonell	2–7	Forståelse av relasjon, symbolsk lek

Konkret operasjonell	7–11	Anskuelig og konkret tenkning
Formell operasjonell	12–utover	Abstrakt tenkning, mulighet til refleksjon

(Furth, 1981, s. 48)

I den første ”sensomotoriske” fasen skjer mye av utviklingen gjennom sansning. Barnet prøver å gripe eller begripe omverdenen. Læring ligger bak alt som barnet får kontakt med eller berører. På dette stadiet er gjenerkjennelse en viktig faktor. Den ”preoperasjonelle” fasen kjennetegnes ved at det sansemotoriske til en viss grad avløses, og en ny forståelse i form av for eksempel billeddannelse blir igangsatt. Barnet er selvopptatt, står ”midt i verden” og har ikke mulighet til å leve seg inn i andres følelser på grunn av en ikke utviklet refleksjonsevne. Denne evnen utvikles først i den ”konkrete operasjonelle” fasen, hvor barnets tenkning har kommet et skritt videre. Men fortsatt er tekningen mer intuitiv enn logisk, og blir direkte påvirket av sansningen. I den ”formelt operasjonelle” fasen har barnet kommet til et punkt hvor den abstrakte tenkningen har begynt. Muligheten til å trekke en egen konklusjon ut av noe preger denne fasen mest.

Hver fase i denne modellen er en forutsetning for det neste utviklingsstadiet. Det bygger seg opp gjennom tid. I denne sammenhengen kommer vi også tilbake til assimilasjon og akkomodasjon, som har en viktig funksjon her. Etter min oppfatning gjennomgår det unge mennesket ved hjelp av denne adaptasjonsprosessen en tilpasning til omverdenen som virker positiv på den kognitive utviklingen. Også modenhet, erfaring og oppdragelse er etter min mening forbundet med dette. Her møtes alle de nevnte elementene, og vi kan ut fra denne modellen konkludere med at tenkningen utvikler seg fra fødselen av gjennom en aktivitet som setter i gang en læringsprosess. Det hele munner så ut i en abstraksjonsevne ved omtrent 12-årsalderen, som medfører evnen til å reflektere over sine egne tanker.

Det jeg tidligere nevnte møter vi her igjen, nemlig at først når barnet er på det modningsnivået som medfører abstraksjonsevne, er det mulig å introdusere elementær algebra som matematisk retning på skolen. Steinerskolens læreplan forholder seg etter min mening til det, som jeg skal belyse i kapittel 5.

Jean Piagets forskningsteorier kan i mine øyne ses som en slags bekreftelse eller presisering av Rudolf Steiners ideer om menneskets utvikling i forhold til tenkningen, som også gjenspeiles i Steinerskolens læreplan.

2.3 Algebra i historisk sammenheng

På de følgende sider skal jeg prøve å gi et innblikk i matematikkens utvikling. Jeg er klar over at det er et enormt tema som egentlig kunne vært en oppgave i seg selv. For å belyse denne utviklingen har jeg derfor valgt ut de etter min mening viktigste og mest verdifulle kulturepokene i forhold til matematikken. Med utgangspunkt i dette skal jeg forsøke å forklare hva matematikk egentlig er, og hvilken posisjon algebraen har.

Det finnes ingen allmenn anerkjent definisjon av matematikk, men selve ordet ”matematikk” stammer fra det greske ”mathématiké (téchné)”, som betyr ”kunsten å lære”. Det kan også være avledet av det greske ”mathesis”, som kan oversettes med ”kunnskap” (Dahl, 1991, s. 31). Matematikken er en del av de såkalte naturvitenskapene, og beskriver en undersøkelse av figurer og regning med tall og bokstaver. Men det har ikke alltid vært slik vi ”regner” i dag. Viggo Brun, tidligere professor i matematikk ved Universitetet i Oslo, skriver i sin bok *Alt er tall* at ”tellekunsten er eldre enn ord for tallene” (Brun, 1981, s. 11). Det betyr at helt fra menneskehetens opprinnelse fantes det en aller annen form for nedtegnet telling. Dette kan også være i form av en fortelling med billedlig fremstilling av det som hendte, som ikke kunne beskrives språklig på grunn av ”ordmangel” (Holme, 2007, s. 11). Men sikkert er det at det første bevis på en matematisk fremstilling ble funnet i Afrika. Det viser noen hakk i et bein som er omtrent 35 000 år gammelt (Holme, 2007, s. 12). Forskningsresultater viser at det ligner en form for en kalender som fortsatt brukes av ”urbefolkningen i Namibia”.

Det neste viktige steget i matematikkens historie fant sted rundt 2500 år f.Kr. i Egypt. I våre dager blir det ofte antatt at den matematikken vi kjenner i dag, har utgangspunkt i den greske kulturen. Men til og med oldtidens grekere henviste til den egyptiske kulturen og dens kunnskaper innenfor matematikk (Gronau, 2009, s. 7).

I 1850-årene ble det funnet en ”papyrusrull"[1] som beviser egypternes matematiske kunnskaper. Dette viste at egypterne var utrolig flinke til å beregne geometriske former til for

[1] Papyrus er en tidlig form for papir og også en betegnelse for manuskripter.
[2] Pi eller π er en definisjon av forholdet mellom diameteren og omkretsen av en sirkel.

eksempel utvikling av land- og vannsystemer. Et ytterligere bevis på egypternes matematikkunnskaper er selvfølgelig pyramidene, som ikke kunne ha blitt bygget uten store matematiske ferdigheter. For å beregne for eksempel sirkelens omfang (π = Pi)[2], som er nødvendig for beregning av flere geometriske former, brukte de regelen: 8/9 av diameteren multiplisert med seg selv gir omkretsen av en sirkel, som gir $\pi \sim 3{,}1605$ (Dahl, 1991, s. 31). Denne beregningen ligger veldig nær *Arkimedes*[3] beregning ($\pi = 3.1418$), som jeg skal komme tilbake til senere i dette kapittelet. Detlef Gronau skriver i sitt kompendium til en forelesning ved Universitetet i Graz at grekerne sikkert overtok mye fra den egyptiske matematikken, men utviklet den mye mer når det gjelder tankemåte og bevisføring (Gronau, 2009, s. 12). Det kommer tydelig fram at det var babylonerne som bidro mest til denne utviklingen.

Allerede 3500 år før Kristus hadde den babylonske sivilisasjonen et utpreget høyt kulturliv. Det fantes store tempelanlegg, et rikt kulturliv og et velutdannet næringsliv. Dette var også grunnlaget eller bruksområdet for utviklingen av matematikken. I alle sine beregninger benyttet babylonerne et tallsystem basert på tallet 60[4] (Dahl, 1991, s. 32). Dette systemet kjenner vi også i dag i våre tids- og sirkelberegninger. *Klaudios Ptolemaios*[5] benyttet det babylonske tallsystemet som grunnlag for sine naturvitenskapelige teorier. Senere ble dette overført til den arabiske kulturen og vitenskapen, som er opphav til det moderne tidssystemet. Et bevis på dette er funn av flere tusen år gamle babylonske leirtavler som viser matematiske beregninger i forhold til for eksempel byggverk, skatt og kalendere. Og babylonerne kjente også til den i vår tid såkalte ”pytagoreiske læresetning” mye tidligere enn *Pythagoras*[6] selv gjorde det (Holme, 2007, s. 49).

Pythagoras er også fellesnevneren for det jeg nevnte om Egypt og Babylon og at gresk matematikk delvis har utgangspunkt i disse kulturene. For det var Pythagoras selv som reiste til både Egypt og Babylon og studerte skriftene han fant der (Holme, 2007, s. 78). Vel hjemme i Hellas grunnla han sin egen skole. Som tidligere nevnt er Pythagoras i dag mest kjent for den berømte pytagoreiske læresetning[7].

En annen viktig rolle i den greske matematikkutviklingen spilte Arkimedes (se ovenfor).

---

[2] Pi eller π er en definisjon av forholdet mellom diameteren og omkretsen av en sirkel.
[3] Gresk matematiker, omtrent 287 f. Kr.–212 f. Kr.
[4] I dag er vårt tallsystem basert på 10-tallet.
[5] Gresk matematiker og filosof, omtrent 100–175
[6] Gresk matematiker og filosof, omtrent 580 f. Kr.–500 f. Kr.
[7] Summen av kvadratene av katetenes lengde i en trekant er lik kvadratet av hypotenusens lengde: $a^2 + b^2 = c^2$

Uansett om matematikken som grekerne benyttet seg av var kjent i tidligere tiders kulturer, så er det viktig å understreke at det var først i Hellas at matematikken omtrent slik vi kjenner den i dag ble utviklet.

Det gamle Hellas var matematikkens storhetstid. Men under Romerrikets blomstringsperiode ble matematikken glemt og var ikke interessant for regjeringen. Araberne spilte imidlertid en viktig rolle i matematikkens historie. I det 8. århundre var Bagdad hovedstaten i det muslimske riket, og det ble bygget et stort bibliotek hvor mange vitenskapelige verker fra andre kulturer ble oversatt. Dermed ble det utviklet og videreført en stor interesse for matematikk. Grunnsteinen i vår tids forståelse av algebra ble lagt i denne tiden. *Al Khwarizmi*[8] regnes som grunnlegger av algebraen (Holme, 2007, s. 114). Ordet ”algebra” kommer fra det arabiske ”*al jabr”* og betyr ”å sette sammen” (Holme, 2007, s. 114). En annen betydning er ”gjenoppbygning”, og kommer fra boken *Al jabr w'almuqabalah,* som ble skrevet av Al Khwarizmi rundt 800-tallet. Hans verk handlet mye om ligninger – han forvandlet negative ledd i en ligning til positive ledd ved overføring til den andre siden av likhetstegnet. Det kalte han gjenoppbygging (Brun, 1981, s. 81). De store fremskrittene som ble gjort på denne tiden, danner grunnlaget for matematikkinteressens gjenoppdagelse og utvikling i Europa.

Leonardo Fibonacci av Pisa[9], sønn i en handelsfamilie og en av middelalderens store matematikere, fikk undervisning i grunnleggende matematiske ferdigheter av sin far. På sine handelsreiser ble han kjent med den arabiske matematikken, og dette la grunnlaget for hans videre interesse for matematikk. Han skrev to bøker om det han hadde lært om aritmetikk, algebra og geometri (Dahl, 1991, s. 37). I dag er han imidlertid mest kjent for ”Fibonacci-følgen”, som beskriver en uendelig rekke av tall hvor summen av de to forutgående tallene er lik neste tall i tallrekken. Fibonacci-tallene er en viktig del av matematikken som vi finner igjen i mange av naturens lovmessigheter, for eksempel i en spiral.

En annen betydningsfull person i denne sammenheng er *Leonardo da Vinci*[10]. I dag er han mest kjent som maler, men selv mente han at ”for å kunne male og for å forstå malerier er matematiske forkunnskaper nødvendige” (Brun, 1981, s. 216). Det kommer tydelig fram at han hadde stor interesse for matematikk, noe som helt klart kan ses i hans malerier og

[8] Muslimsk matematiker, (780–850)
[9] Italiensk matematiker (1180–1250)
[10] Italiensk kunstner (1452–1519)

teknologiske oppfinnelser. Han var også veldig opptatt av *"det gylne snitt"*[11] i forholdet til den menneskelige kropp. Det samme var *Albrecht Dürer*[12], som bidro mye i den moderne matematikken. Det gylne snitt ble hyppig brukt i renessansen, for eksempel i forbindelse med konstruksjon av bygninger. Men en av de viktigste matematikere fra denne tidsepoken er *Carl Friedrich Gauß*[13]. I sin doktorgradsavhandling beskrev han en essensiell del av den moderne matematikken: algebraens fundamentalteorem. Han fant ut at alle algebraiske ligninger med en større grad enn null har minst én reell eller kompleks løsning. Gauß regnes som matematikkens konge, og hans vitenskapelige beregninger betraktes som grunnsteinen i den moderne tallteorien (Dahl, 1991, s. 72).

Tidsepoker og personer som er omtalt i dette kapittelet er etter min mening verdt å nevnes i forbindelse med innføring av algebra. Grunnen til at jeg har valgt å skrive også om det historiske, som utgjør en så stor del av denne oppgaven, er at jeg mener det kan bidra til en større interesse for matematikk og en evne til å se sammenhenger mellom matematikk og realiteten. Det skal jeg komme tilbake til i kapittel 3.

3. Innføring av algebra

I forrige kapittel beskrev jeg noen elementer som jeg mener er viktige for forståelsen av ved hvilken alder algebra bør innføres, og ga et historisk overblikk. I dette kapittelet skal jeg behandle hovedtemaet i denne oppgaven, og gå mer inn på elevenes verden i forhold til forutsetninger for algebraisk forståelse. Dette forsøkte jeg også å belyse under kapittel 2.1. og 2.2 i forbindelse med tenkningens utvikling. Nå skal jeg se på de faglige forkunnskapene og gi en kort framstilling av hva som kreves for tilegnelse av algebra.

I læreplanen for Steinerskolen fra 2004 står det at "algebraen introduseres gjennom rente, flatemål eller prosentregning" (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 98). Jeg har valgt å ta for meg renteregning som et innførende matematisk prinsipp, da det etter min mening er det mest verdifulle og beste grunnlaget for en tilnærming til elementær algebra.

[11] Ved en deling av en linje er forholdet mellom den minste og den største delen lik forholdet mellom den største og hele linjen.
[12] Tysk matematiker (1471–1528)
[13] Tysk matematiker (1777–1855)

3.1 Nødvendige forkunnskaper

I det følgende skal jeg redegjøre for hva som kreves av ferdigheter og kunnskaper før elementær algebra kan introduseres. Oppgavens begrensende omfang gir meg bare mulighet til å gi et lite innblikk i hvert tema, men selv om det er kort, er det uansett viktig for en videre forståelse av oppgaven og skaper forhåpentligvis en ytterligere interesse for temaet.

3.1.1 Sansene i forhold til matematikk

Et sentralt område i steinerpedagogikken er sanseerfaringer i undervisningen, særlig i de første skoleårene, da gode sanseerfaringer gir gode forkunnskaper. Derfor er det relevant å si noe om sansene i kombinasjon med matematikk, som jeg skal gjøre nedenfor.

For å forstå sammenhengen mellom sansene og matematikken, må jeg først gi et kort resymé av Rudolf Steiners sanselære basert på Willi Aepplis bok *Menneskets sanser*. Han skriver at det finnes to fremgangsmåter for å tilnærme seg sansenes verden. Den første og vanligste metoden er å se på sanseorganene og de respektive sansene. Resultatet er at ”mennesket har så mange sanseorganer som vi får bekreftet anatomisk” (Aeppli, 2003, s. 21). Ut fra dette får vi de sansene som er mest utforsket utenfor steinerpedagogikken. Den andre måten å nærme seg dette på, er å spørre: ”Hvor mange erfaringsverdener finnes det som bare sansene kan gi oss kunnskap om?” (Aeppli, 2003, s. 21). Aeppli skriver at ifølge Steiner er det tre forskjellige områder som er aktuelle: vår egen legemlighet, den ytre natur og våre medmennesker. I tilknytning til disse områdene finnes det tre grupper med sanser som til sammen utgjør tolv sanser:

De fire nedre sanser

Rudolf Steiner kaller de fire nedre sanser også for ”viljessanser”. Grunnen til dette er at de er ”(...) en gruppe av sanser som står i den nærmeste forbindelse med stoffskifte-lemme-mennesket og viljen, som er bundet til dette” (Aeppli, 2003, s. 22). Sansene vi snakker om er ”livssansen”, ”balansesansen”, ”berøringssansen” og ”bevegelsessansen”. Det vi iakttar gjennom dem, blir oss ikke virkelig bevisst. Hvis vi legger merke til at vår egen vilje er i en søvntilstand, kan man på en måte si at vi sover mens vi benytter oss av våre viljessanser. Det blir en automatisert prosess når vi tenker på for eksempel balansesansen. For et barn er det noe helt nytt det må lære seg. Selv for et barn i skolealderen kan det fortsatt være vanskelig, og noe man må øve seg på og ikke minst lære seg for å være i stand til å føle seg fri. ”At vi kan oppleve oss selv som en fri sjel, det er bevegelsessansens utstråling (...)” (Geisteswissenschaft als Erkenntnis der Grundimpulse sozialer Gestaltung, GA 199, foredrag av Rudolf Steiner, 08.08.1920, sit. etter Aeppli, 2003, s. 72).

De fire midtre sanser

De fire midtre sanser er knyttet til følelsen – de er såkalte følelsessanser. Gjennom dem iakttar vi alt som har med vår omverden å gjøre – ”den ytre natur”. Tre av dem, som er ”synssans”, ”luktesans” og ”smakssans”, kan vi også finne i den vanlige forståelse av sansene, utenfor antroposofien. Men ”varmesansen” har Rudolf Steiner tilført sin sanselære.

De fire øvre sanser

De fire øvre sanser, som er ”hørsel”, ”ordsans”, ”tankesans” og ”jeg-sans”, gjør oss på en måte til et ”helt menneske”. Disse sansene gjør det mulig å oppfatte et annet menneskes jeg og tanker. Gjennom dem iakttar vi hva en annen person ”frembringer og åpenbarer”. Dette er såkalte ”erkjennelsessanser”. Willi Aeppli beskriver det som den kunnskap vi oppfatter hos et annet menneskets vesen, og ”at altså tone, tale, tanker og det andre menneskets jeg er en virkelig erfaringsverden, en omverden som kan iakttas av oss ved hjelp av sanseorganer” (Aeppli, 2003, s. 33).

Nå vil jeg redegjøre for hvorfor jeg har tatt med beskrivelsen av sansene:

Særlig det første møtet med tallenes verden skjer etter min mening gjennom sansene. Vi opplever tall i det som er omkring oss. Allerede i barnehagen lærer vi noe om tall. Det kan være i forskjellige situasjoner, som for eksempel rytmelek, sang og fortelling. Særlig fortelling står i forbindelse med ”å telle”. Men hvilken sammenheng har det med sansene, og hvordan bruker man det i undervisningen på Steinerskolen? Utviklingen til en abstrakt, matematisk tenkning (se kapittel 2.2) begynner nemlig ikke med abstrakt undervisning. Elevene i de første skoleårene skal få et positivt forhold til opplevelsen av tallene, og dette skjer til dels gjennom sansene. En følelsesmessig tilnærmelse skaper en større identifikasjon med tallene som kvalitet. ”Et hovedmål er å få frem tallet som individualitet, som «vesen», det skal erobres på samme måte som bokstavene i språket” (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 92). Det kan bygges opp gjennom billedmessig undervisning og rytmisk øving. Bevegelse er knyttet til tenkning og dermed også til læring. Også visuelle sanseinntrykk har stor betydning for den første matematikkundervisningen. Dette får elevene i form av en billedlig fremstilling av tallene, hvor for eksempel ”1” er helheten som kan fremstilles med en sirkel, ”2” får vi ved å dele denne sirkelen og ”3” kan være en trekant. Dermed danner elevene et indre bilde som representerer en kvalitet ved tallene. Som lærer er man spesielt i de første skoleårene ansvarlig for å skape en billedmessig undervisning som appellerer til fantasikreftene. Disse gjør det mulig å fatte for elevene, og fører til en sterkere indre følelse for undervisningstemaet. Vi kan forme f.eks. en fortelling til ”en så billedaktig fortelling for barnet at det senere, når det ser noe slikt i naturen, kan oppleve det med en helt annen interesse og forståelse enn det ellers hadde kunnet” (Aeppli, 2003, s. 63). Og dette kan vi overføre til matematikken gjennom en kvalitativ fremstilling av tall eller regnebegreper. Slik kan vi se at sanselæren bidrar til Steinerskolens matematikkundervisning og er en betydelig del av helheten.

Etter at jeg har gitt et lite innblikk i sansenes betydning for matematikkundervisningen, skal jeg nå se på et basiselement for all matematikk.

3.1.2 Naturlige tall

Tallforståelse er en grunnleggende forkunnskap for matematisk forståelse. ”Naturlige tall” er alle hele tall over null. Det betyr 1, 2, 3, 4 osv. Men hvordan lærer barn om det, og hvordan begynner matematikkundervisning på Steinerskolen? I 2. klasse på Steinerskolen begynner man først ”å bearbeide” de naturlige tallene opp til 12 og noen ganger 20 (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 94). Man prøver å få frem en individualitet, en karakter i tallene, hvor man går ut fra helheten. Det betyr å begynne med 1, som kan ha en sirkel som visuell representant, og ved en deling av denne sirkelen kommer vi til 2 (se ovenfor). Slik får alle tallene et kvalitativt bilde som elevene lettere kan huske med hjelp av gjenkjennelse. Selv om det er mulig at mange barn alt har stor tallforståelse fra før, kan denne grundige bearbeidelsen gjennom rytmisk øving og nedskriving av tallenes egenskaper gi et rikt og verdifullt opplevelsesspekter og en ny erfaringshorisont.

3.1.3 De fire regnearter

Det kvalitative forholdet elevene har bygget opp til tallene, videreføres nå til den første ”regneundervisningen”. De fire regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon blir over tid introdusert i 2. klasse. Alt det elevene lærer på dette stadiet, danner grunnlaget for all videre utvikling, særlig innenfor matematikk, men også flere andre fag. Læreren forvandler regneuttrykkene til et bilde, en karakter, som bidrar til en større forståelse og gjenkjennelse. Det er viktig å få fram kvalitative karakteregenskaper i hvert enkelt tegn. Et mye brukt eksempel i Steinerskolen er en historie rundt ”de fire regnenissene” (Harrer, 2005, s. 14), som representerer de fire regneartene. Hver nisse har en kvalitet som tilsvarer noe som ligner addisjon eller subtraksjon osv. Ved å bruke denne historien kan elevene forbinde tallene med noe spesielt og spennende. Dette kan benyttes som innføring i første skoleår og videreføres i andre skoleår. Etter hvert går man over til de rene, abstrakte regnestykkene. Veien går altså gjennom en følelsesmessig og opplevelsesmessig måte å introdusere de fire regneartene på, for deretter å gå over til en mer forstandsmessig måte å regne på. ”Målet er at barna selv kommer i bevegelse, både praktisk og tankemessig, slik at de kan gjennomskue det som skjer og øve en smidig og levende regneevne” (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 94).

Som allerede nevnt under kapittel 3.1.2 tar vi igjen utgangspunkt i helheten og går til delene (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 94). Vi kan gå ut fra et gitt tall og spørre klassen hva det ellers kunne vært. Dermed får vi frem et mangfold både i regningen og elevenes tenkning. Oppgavene kan også bestå av en lek hvor vi leter etter et tall som er ukjent, som for eksempel $12 = 8 + x$. Dette kan man også øve på med konkrete hjelpemidler. Oppgaven blir bearbeidet og svaret og en eventuell løsningsmetode får elevene oppdage selv. Det som er interessant ved akkurat dette, er at vi kommer tilbake til det etter noen år. Ved innføring av algebra i 7. klasse kan vi fortelle elevene om det vi gjorde i 2. klasse, og forhåpentligvis vil elvene gjenkjenne det (Jarman, 1998, s. 42).

3.1.5 Brøkregning

Brøkregning er tema i 5. klasse på Steinerskolen. Forutsetningen er en god forståelse av 10-tallsystemet og en sikker omgang med de fire regneartene. Utviklingen av tenkningen må ha kommet til et stadium som tillater større kognitive prosesser enn tidligere. Elevene har lært om tid og klokken i 4. klasse, og det tilhørende 60-tallsystemet. Dette kan være et utgangspunkt for innføring av brøk. Her må vi skille mellom brøk som tallstørrelse og operatør, passiv eller aktiv (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 96). Erik Marstrander skriver i sin bok: ”Innføring av brøk bør skje på tre forskjellige måter” (Marstrander, 2001, s. 36). Først går man som så ofte før fra helhet til del. I forbindelse med brøk betyr det at vi har noe konkret som vi deler opp først i ½, ¼, osv. Igjen skaper vi en opplevelse av at et helt tall kan fremstilles med flere forskjellige brøker. Den neste metoden er å betrakte det man har gjort fra annen vinkel: fra del til hel. Erik Marstrander stiller et godt spørsmål og bruker et godt eksempel på dette: "Hvilken del er dette av helheten?" (Marstrander, 2001, s. 36). Eksempelet er hentet fra en familie, og elevene skal finne ut hvor stor del for eksempel to barn av familien utgjør. Den tredje metoden Marstrander beskriver, handler om en "sammenligning av størrelser". Forskjellige forhold blir fremstilt i form av brøk. Slik kan et første møte med brøk på skolen se ut. Neste stadium i arbeidet er utviding og forkorting av brøk.

Men hva bidrar dette til i innføringen av elementær algebra? Brøkregning utgjør en stor del av den videre matematikken på skolen, både i algebra og geometri. Forståelsen for dette feltet er altså essensiell for å mestre de økende vanskelighetskravene i undervisningen.

De delene av matematikkundervisning jeg har beskrevet ovenfor, omfatter selvfølgelig ikke alle læringsområder, men gir en kort oversikt over noen viktige forkunnskaper som kreves for algebraundervisning. Som beskrevet tidligere bygges nesten all undervising på det som går forut for det. Det har jeg forsøkt å vise i dette kapittelet. Nå skal jeg ta for meg matematikkundervisning i 7. klasse, som er hovedtemaet for denne oppgaven.

3.2. Renteregning

Som sagt ovenfor har jeg valgt renteregning som eksempel til innføring av elementær algebra. I det følgende skal jeg beskrive hvordan dette kan fungere i en 7. klasse. I kapittel 2.3 ga jeg et kort overblikk over matematikkens historie. Det kan vi nå komme tilbake til. Selvfølgelig kan vi først åpne en diskusjon i klassen om de eventuelt har noen penger på kontoen, og hvorfor de har penger i banken. Men en annen måte å nærme seg renteregning på, står i en historisk sammenheng: Vi kan fortelle om bankens opprinnelse i middelalderen og de samfunnsmessige følgene av dette. Erik Marstrander beskriver at intensjonen bak det er "å føre barnet ut av forestillingen om det isolerte enkeltindivid eller det isolerte folk og inn i en opplevelse av menneskets samkvem, (...)" (Marstrander, 2003, s. 44). Dette kan også brukes i en aktuell sammenheng. Han mener videre at historie og geografi etter hvert bør settes i forbindelse med den matematiske forståelsen barna oppøver i vårt moderne samfunn (Marstrander, 2003, s. 44). Denne tverrfagligheten kan etter min mening skape en større forståelse og interesse for matematikken, og gi bedre utbytte og nytte av faget.

Men for å komme tilbake til renteregning: Hva er det og hvorfor trenger vi det? Elevene har hørt om opprinnelsen til bankvesenet og kan gi eksempler bygget på egne erfaringer. Bruken av penger kommer inn i bildet hvis vi spør: ”Hva hadde skjedd hvis vi ikke hadde hatt pengene?” (Marstrander, 2003, s. 45). Da kan diskusjonen munne ut i det faktum at handel med andre byttemidler kan være et alternativ. Det blir fort tydelig at det ikke fungerer på samme måte som med penger som ”byttemiddel”, fordi penger også kan sees som en ikke-materiell verdi. Penger er nemlig det eneste byttemiddelet som kan brukes til et ”... hvilket som helst formål, til en hvilken som helst låntager, på et hvilket som helst tidspunkt” (Marstrander, 2003, s. 47). Og her kommer bankens rolle inn i bildet! Det vi har i overskudd av form av materielle goder, kan ved handel bli til penger. Dersom vi har nok av det, kan det settes inn i banken. Og hva skjer med pengene våre når de først er i banken? De kan lånes ut av en tredje person som selvfølgelig må betale for det. Her skal jeg beskrive en imaginær eller oppdiktet undervisningssituasjon:

Klassen har kommet så langt at de kan prosentregning, kjenner til bankvesenet og det faktum at det er mulig å låne penger. Nå kan læreren komme med en konkret situasjon om for eksempel en venn som vil åpne en forretning. Han har spart opp noen penger, men trenger fortsatt å låne størstedelen for å leie kontor og betale de første regningene. Hvor mye må han betale for det, hva er renten?

Ved å benytte oppgaver av denne typen kommer man forhåpentlig sammen med klassen fram til følgende (Marstander, 2003, s. 48):

- Hvor mange penger som blir lånt
- Hvor lenge pengene blir lånt
- Hvor mange prosent banken beregner seg

Dette må tas med i betraktningen om renteberegning. Dermed kan læreren forklare at pengene som blir lånt er kapital, tiden er rentedager og prosent er rentefot. Tiden trenger en videre forklaring fordi året beregnes med 360 dager. Ut fra dette kommer man sammen med klassen fram til følgende formel for beregning av rente:

$$\text{Rente} = \frac{\text{Kapital} \cdot \text{Prosent} \cdot \text{Tid}}{100 \cdot 360}$$

Slik kan en fremgangsmåte for innføring av renteregning se ut. Jeg skal ikke gå nærmere inn på de forskjellige avledninger av denne første formelen, men bruker det som et eksempel på veien til elementær algebra, som jeg skal beskrive i neste kapittel.

3.3 Elementær algebra

Hittil har jeg gitt et overblikk over hva som må til før man kan undervise i elementær algebra. Alle elementer jeg har tatt med i denne oppgaven er etter min mening forbundet med dette. Jeg er ganske sikker på at de fleste er enige med meg om at man må kunne beherske noen grunnleggende regneferdigheter før man introduserer algebra. Men det er kanskje ikke så mange som vet at hvis man betrakter dette fra et annet perspektiv, kan man si at algebra ble introdusert allerede mye tidligere enn i 7. klasse. Selvfølgelig er det ikke algebra slik elevene blir kjent med det i 7. klasse, men en form for det. Hvis vi for eksempel har oppgaven 12 = 10 + ?, så leter vi etter noe ukjent. Det ukjente blir ikke her framstilt med bokstaver, men gir et grunnlag for en mer fleksibel tenkning i den første matematikkundervisningen. Denne fleksibiliteten oppøves gjennom alle årene på skolen. Ved innføringen av elementær algebra kommer vi på en måte tilbake til den nevnte oppgavetypen. Men hva er egentlig *elementær algebra*? Algebra er som tidligere nevnt en gren innenfor matematikken, og elementær algebra er betegnelsen på den typen algebra vi lærer på skolen. Andre typer, som for eksempel *abstrakt algebra*[14] eller *kommutative algebra*[15], er noe man kan møte når man studerer matematikk på universitetsnivå. En videre forklaring på elementær algebra er regning med ligninger med minst én ukjent, og ”bokstavregning” som forenkling av algebraen. I fortsettelsen av denne oppgaven skal jeg se nærmere på overgangen til ”bokstavregning” og introduksjonen av algebra.

Erik Marstrander skriver at ”Overgangen fra å kunne regne med tall til å kunne regne med bokstaver er, ved siden av overgangen til brøkregning, en av de store terskler i matematikken” (Marstrander, 2003, s. 57). Dette betyr slik jeg tolker det at det kan være vanskelig for elevene å ta skrittet til en algebraisk forståelse, men vi vet jo at det kan bygges langsomt opp. Veien går her fra ”terminologisk algebra (symbolene er ikke innført), via synkopert algebra (symbolene er forkortninger av ord) til symbolsk algebra” (Kvalvaag og Mathisen, 2005, s. 98). Dermed tydeliggjøres at det eksempelet jeg brukte tidligere i dette kapittelet allerede kan

[14] Abstrakt algebra beskriver arbeidet med algebraiske strukturer som grupper, ringer og kropper.
[15] Et grunnleggende element for algebraisk geometri og tallteori.

regnes i form av algebraisk matematikk. Som jeg beskrev i kapittel 3.2, er renteregning en mulighet og vesentlig del i forbindelse med innføring av algebra. I og med at klassen har jobbet med renteformelen og forvandlingen av den, kommer det neste skrittet mot algebra til syne som et symbolspråk. I renteregning bruker man synkopert algebra. Ord som ”rente”, ”kapital” og ”tid” blir etter hvert forkortet, og kun forbokstaven brukes for selve ordet. Slik kommer vi fram til formelen:

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{K} \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{T}}{100 \cdot 360}$$

Elevene er blitt fortrolig med disse forkortingene, og kan bruke dem i renteregning. Her står bokstavene for noe konkret som må erstattes. Viktig er ”å frata tallene (ment er ordene eller forkortelser av ordene) alt preg av mengde, slik at overgangen til en bokstavrepresentasjon blir lett” (Marstrander, 2003, s. 58). Uansett om bokstavene i renteregning bare er en forkortning, så kan de i teorien framstille et hvilket som helst tall kun avgrenset av oppgaven som skal beregnes. Ved å erstatte disse forkortingene kan elevene øve seg og oppleve at formelen blir den samme, mens tallverdiene kan forandre seg. Dette kan skape en fin overgang til symbolsk algebra, der flere forskjellige tall kan fremstilles med bare én bokstav i forskjellige oppgaver. Med dette har vi skapt en forståelse for at en bokstav kan representere et tall, og eleven har kommet et skritt videre i tenkningen og evnen til abstraksjon. Det er som tidligere nevnt en konkret situasjon som skapes gjennom matematikken, og bokstaver som regnemiddel videreføres til en abstrakt, men realistisk matematisk forståelse.

Det neste skrittet er at vi distanserer oss fra synkopert algebra og går over til ren representativ bokstavregning. Det krever selvfølgelig mer enn bare en forklaring av det hele. Elevene trenger selvbekreftelse gjennom egenerkjennelse av fenomenet. Her kan man bruke oppgaver elevene har løst på et tidligere tidspunkt i matematikkundervisning:

$$5 + 5 + 5 \ =$$

Elevene har lært at hvis vi har en addisjonsoppgave med flere like tall, så kan dette forvandles til en multiplikasjonsoppgave:

$$5 + 5 + 5 \ = 3 \cdot 5$$

I slike oppgaver kan vi se at tallene har det til felles at de er like. Hvorfor kan vi altså ikke ta noe som representerer denne verdien? Det har vi jo gjort ved innføringen av multiplikasjon i

2. klasse. Tre esker med fem kastanjer i hver! Her kan vi bruke et felles symbol istedenfor tallene. Oppgaven blir følgende:

$$\mathrm{a} + \mathrm{a} + \mathrm{a} \ = 3 \cdot \mathrm{a} \text{ eller } 3\mathrm{a}$$

Det er viktig å fjerne alle forestillinger rundt denne bokstaven – den kan være hva som helst. Vi kan la elevene gjøre prøven selv: de kan sette inn hvilket som helst tall for a. Svaret blir alltid 3a. Det kan man også øve på med oppgaver med flere ledd. Gjennom dette arbeidet kommer elevene fram til algebraiske sannheter, og det er "å anbefale at man nedfeller algebra ikke bare som formler, men som språklige setninger" (Marstrander, 2003, s. 61). En oppgave som nevnt ovenfor kan språklig formuleres som: Å addere tre like tall er det samme som å multiplisere et tall med 3. I en videre bearbeidelse av denne oppgavetypen bør det synliggjøres for elevene at i en annen oppgave kan bokstaven representere et hvilket som helst annet tall. Gjennom bruken av språk kombinert med matematikk blir en annen side av læringen ivaretatt. En forbindelse mellom språk og tenkning blir beskrevet av Lev Vygotskij[16]. Hans forskning beskriver hvordan den språklige funksjonen kan utløse og forsterke en intellektuell prosess av tenkningen (Gleichsatz, *Denken und Sprechen*) som påvirker læring og understøtter internalisering av ferdigheter i matematikk ved å språkliggjøre matematikk.

Arnold Bernhard skriver i sin bok *Algebra für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen* at det kan være fruktbart å knytte algebra nært opp til regning med tall (Bernhard, 1991, s. 11). Han mener til og med at det kan være nyttig å kombinere det med hoderegning. I det følgende vil jeg redegjøre for Arnold Bernhards tanker rundt temaet fra tall til bokstav.

Han skriver at det er nyttig å bruke multiplikasjon av et tosifret tall i innføringen av bokstaver (Bernhard, 1991, s. 11). La oss nå ta det følgende eksemplet:

$$6 \cdot 17 \ =$$

Elevene har lært hvordan de skal løse en slik oppgave, og kommer ved en oppdeling av tallet i de enkelte summer til følgende svar:

$$6 \cdot 17 \ = 6 \cdot (10 \ + 7) = 6 \cdot 10 \ + 6 \cdot 7 \ = 102$$

Slike oppgaver regnes også med to eller flere sifrer i begge tallene. I prosessen ovenfor løser vi opp parentesen ved multiplikasjon. Vi kan se på noen lignende oppgaver og spørre klassen

[16] Russisk psykolog (1896–1934)

om vi kan sammenfatte det i et eksempelregnestykke. Det blir tydelig gjennom det følgende eksempel:

$$12 \cdot 13 = (10 + 2) \cdot (10 + 3) = 100 + 30 + 20 + 6 = 156$$

$$22 \cdot 23 = (20 + 2) \cdot (20 + 3) = 400 + 60 + 40 + 6 = 506$$

$$32 \cdot 33 = (30 + 2) \cdot (30 + 3) = 900 + 90 + 60 + 6 = 1056$$

(Bernhard, 1991, s.13)

Hvis vi fortsetter med dette, kan vi til slutt lage en formel som gjelder alle oppgaver av denne typen. Den er slik:

$$(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 3a + 2a + 6 = a^2 + 5a + 6$$

(Bernhard, 1991, s. 14)

Det er nødvendig å jobbe videre med denne type oppgaver. Hvis elevene er blitt sikre i omgang med oppløsning av parentes, knyttes det også opp til andre algebraiske regnestykker. "Elevene trenger å få varierte erfaringer og møte forskjellige måter å utrykke generelle sammenhenger på, for at de skal bli kompetente innenfor dette området av matematikken" (Skolenettet, *Tilpasset opplæring og algebra*). Viktig er også at elevene i alle matematiske oppgaver får en følelse av mestring, en selvbekreftelse. I arbeidet med algebraiske formler eller algebra generelt er det lett å få fram dette. Mye av undervisningsstoffet kan elevene allerede, men de lærer det nå på nytt på en mer abstrakt måte. Jeg vil komme tilbake til det i kapittel 4.

Jeg har nå gitt et innblikk i hvordan algebra kan introduseres ved å beskrive de nødvendige forkunnskapene og forklare veien fra renteregning til bokstavregning, fra synkopert til symbolsk algebra. Nedenfor vil jeg vende tilbake til kapittel 2.3 om matematikkens historie, og gjøre rede for hvordan dette etter min mening kan kombineres med matematikkundervisningen.

3.3.1 Matematikkens historie i undervisning

I kapittel 2.3 har jeg gitt et kort innblikk i algebraens opprinnelse. Aritmetikk og algebra har imidlertid ikke alltid spilt en like stor rolle innenfor matematikk som i dag. I tidligere tider var det geometrien som var mest anerkjent og viktigst i forhold til bruken av matematikk.

Kulturepokene og de betydelige personene jeg nevnte i forbindelse med matematikkens historie, kan være en innfallsvinkel for læreren til å gjøre matematikkundervisning mer interessant for elevene. Jeg tror at det kan være vesentlig også å betrakte matematikkens historiske utvikling, slik at elevene kan forstå hvordan matematikken ble anvendt i for eksempel Egypt eller Hellas. Dette er ytterligere en anknytning til virkeligheten, og elevene ser dermed at algebra kan betraktes som et bruksinstrument. Matematikkens historie og de store personlighetene innenfor faget kan også tydeliggjøres i form av tverrfaglig arbeid innenfor for eksempel historie eller norsk.

Utviklingen av algebra gjennom tidene vil dermed stå klarere for elevene, noe som i mine øyne kan bidra til en sterkere tilknytning eller forbindelse til fagstoffet.

4. Algebra som en ny vei inn i matematikken

Etter at jeg har presentert bakgrunnen til og en metode for innføring av algebra, vil jeg nå reflektere over mitt spørsmål: Kan innføringen av algebra være et nytt skritt inn i matematikken i 7. klasse?

Slik jeg har beskrevet det i denne oppgaven, kan vi se at elevene har en lang vei å gå før algebraen blir introdusert. I forbindelse med dette har jeg gjort rede for utviklingen av tenkningen fram til en abstrakt forståelse. Vi vet at det nå til dags finnes det en del mennesker med dyskalkuli, som uten videre behandling eller spesialundervisning ofte ikke lykkes i matematikkundervisning oppover i klassene. ”Dyskalkuli er et medisinsk orientert begrep som beskriver en alvorlig vanske med å lære og bruke matematikk” (Johansson, 2000) og brukes vanligvis ”med en utvidet betydning og omfatter da hele matematikkfaget” (Johansson, 2000). Men også elever uten en slik diagnose kan ha vansker med matematikkfaget. Det er et utbredt fenomen at hvis man først ikke klarer seg så bra, så er det vanskelig å ta igjen det man har gått glipp av. Matematikken blir etter hvert mer avansert, og det kan bli kunnskapsforskjeller mellom elevene. Men jeg tror at innføringen av et nytt matematisk område kan gi muligheter, interesse og motivasjon for en tilegnelse av det man ikke har forstått tidligere. Forståelsen av et nytt tema kan også bidra til en ny erkjennelse av noe som har vært undervisningsstoff før, men som ikke er blitt helt forstått. Etter mitt skjønn kan undervisning i algebra bidra mye i denne retningen. Grunnleggende regneoperasjoner blir ofte gjentatt når det gjelder innføring av bokstavregning. Utviklingen av tenkningen fram til man når en abstrakt forståelse og refleksjonsevne som jeg skisserte i kapittel 2.2, har vesentlig betydning i denne sammenhengen. Denne utviklingen må selvfølgelig følge et vanlig forløp. I og med at en forståelse for synkopert algebra (se kapittel 3.3) er bygget opp, kan den rene symbolske algebraen bearbeides. Her brukes enkle eksempler med de fire regneartene for å nærme seg det nye ”symbolspråket”, som eventuelt kan skape ny forståelse hos elever med matematikkproblemer. ”De fleste elever kan kjenne igjen mønstre og på ulike måter utrykke sammenhenger som kan peke utover enkelteksempler” (Skolenettet, *Tilpasset opplæring og algebra*) ved hjelp av algebra. Dyslektikere har ofte vanskeligheter med å se forskjell mellom enkelte tall. Det kan være et for stort, abstrakt bilde å tenke at 3 + 4 er mindre enn 10, fordi det også kan ses som et sammenhengende tall: 34. Jeg oppfatter det slik at regning med bokstaver i et slikt tilfelle kan bidra til forståelse av ulikheter i matematiske begreper, og til å skille mellom de forskjellige sifrer som utgjør størrelsen av et tall. Det kan bidra til en ny forståelse av matematikken. Arnold Bernhard mener at ”gjennom en algebraisk regning blir regnereglene mer og mer bevist”[17] (Bernhard, 1991, s. 18). Dette forsterker min idé om at algebra kan bidra til en utvidet matematisk forståelse for det som skal komme og for det som har vært gjennomgått i undervisningen.

I denne oppgaven har jeg vist at elementær algebra utgjør en generalisering av matematikken eller av matematikkens lovmessigheter. Det kan slik jeg ser det også være nyttig å forstå regneregler, formler og lovmessigheter innenfor foregående undervisningsstoff for å få en avklaring av tidligere matematikkvansker. Slik kan etter min mening innføringen av algebra være et nytt skritt inn i matematikken!

Etter å ha skildret innføringen av algebra og svart på mitt spørsmål om det nye emne kan være hjelpsomt for en ny forståelse av matematikken, vil jeg nå betrakte læreplanen i den offentlige skolen og steinerskolen for så å komme med en avrundende konklusjon.

[17] Originalsitat: ”Durch das algebraische Rechnen können uns die Rechenregeln immer klarer bewußt werden“.

5. En sammenligning mellom læreplanen i den offentlige skolen og Steinerskolen

I det følgende vil jeg sammenligne noen etter min mening viktige punkter mellom læreplanen i den offentlige skolen og Steinerskolen. Først vil jeg presentere hvordan "algebraundervisning" er inngående beskrevet i begge læreplaner, for så å drøfte enkelte elementer. Jeg skal også beskrive algebra i forhold til tenkningens utvikling som nevnt i kapittel 2.2, og gjøre rede for hvordan læreplanene forholder seg til det.

I Steinerskolens læreplan fra 2007 står beskrevet at

> "I matematikkundervisningen innføres algebra i sammenheng med areal- og prosentregningen. Bruken av bokstaver som representanter for de konkrete tallverdiene medfører en øvelse i abstraksjon. I algebraen fokuseres det sterkere på ideene bak matematikken, sammenlignet med den mer operative bruken av tallene. Evnen til å tenke abstrakt gir større frihet og åpenhet i erkjennelsen. Dette er et viktig skritt på veien til tankens frigjøring fra den konkrete sanse- og erfaringsverdenen." (En læreplan for steinerskolen, *Idé og praksis*, s.21).

Læreplanen fra den offentlige skolen gir følgende introduksjon:

> "Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda *geometri* og *funksjonar*." (Utdanningsdirektoratet, *Læreplanen i matematikk*).

Det går tydelig fram i begge planer at algebraen omfatter en generalisering av matematikkens lovmessigheter. Slik jeg har beskrevet det tidligere (se bl.a. kapittel 4.), øves det i algebraundervisningen nettopp det å finne konkrete eksempler, fremstilt ved hjelp av bokstaver, som gjelder for en rekke regneoppgaver. Oppgavene blir dermed abstrahert. I utsnittet fra Steinerskolens læreplan ovenfor kommer det fram at man legger vekt på en abstrakt tenkning som oppstår i omtrent 12-13-årsalderen (se kapittel 2.). Denne utviklingen blir ikke nevnt i den offentlige skolens læreplan. Slik jeg ser det er det altså ikke forbundet med noen teori om tenkningens utvikling, men man følger mer en idé om hvordan matematikken kan bygges opp og nevner ikke hvordan dette står i forhold til menneskets utvikling. Steinerskolen prøver å se undervisningsstoffet i forhold til både en kulturhistorisk og det enkelte individets utvikling, slik at læringen dermed står i sammenheng med tenkningens utvikling. Slike elementer kan jeg ikke se i læreplanen fra den offentlige skolen.

Oppbygningen av de to læreplanene er systematisk sett ganske lik. Nedenfor skal jeg se på noen kompetansemål i forhold til algebra. I det offentlige har man allerede bestemte kompetansemål etter andre årstrinn, i Steinerskolen først etter det fjerde. Jeg vil sammenligne noen punkter fra begge læreplaner fram til syvende klassetrinn:

I Steinerskolens kompetansemål etter 4. klasse står at elevene skal kunne ”oppdage og anskueliggjøre tallmønstre og lovmessigheter i kjente tabeller” (En læreplan for steinerskolen, *Idé og praksis*, s. 21). Noe slikt finner vi også igjen i kompetansemål for den offentlige skolen, nemlig at elevene skal kunne ”eksperimenterer med, kjenne att, beskrive og vidareføre strukturer i enkle talmønster” (Utdanningsdirektoratet, *Læreplanen i matematikk*). Det viser at både Steinerskolen og den offentlige skolen fortsatt krever en ganske lik utvikling av matematiske evner hos elevene. Noe som kommer tydelig fram i Steinerskolens læreplan er en selvutvikling hos elevene i og med at elevene skal ”ha forståelse for overslag som utvikler selvstendige refleksjoner og selvtillit til å gå løs på ulike problemstillinger” (En læreplan for steinerskolen, *grunnskolen*, s. 16). En slik beskrivelse av elevenes utvikling og selvstendighet kan jeg ikke finne igjen i læreplanen fra den offentlige skolen. Der blir det bare konkretisert hvordan den faglige utviklingen skal skje, men forholdet til individets egenart og selvtillit blir ikke nevnt.

Selv om jeg ser at begge læreplanene er ganske like i forhold til utviklingen av faget, så mener jeg at den offentlige skolen krever mye mer enn Steinerskolen i begynnerfasen av matematikkopplæringen, noe som det etter hvert blir kompensert for. Dette blir tydelig når man stiller begge planene opp mot hverandre. Men i en videre vurdering av kravene for algebraferdigheter kommer Steinerskolen etter min mening fordelaktig ut. Det bygges langsomt opp en relasjon til matematikk og videre til algebra for å skape en naturlig progresjon i faget. Som tidligere nevnt står dette i sammenheng med tenkningens utvikling, noe som i denne oppgaven er relatert til Jean Piagets teorier. På grunnlag av det setter Steinerskolens læreplan algebraundervisning opp som et hovedpunkt i 7. klasse, hvor elevene har nådd et viktig nivå innenfor abstrakt og logisk tenkning i forhold til algebra. To av kompetansemålene for en 7. klasse i Steinerskolen er å ”beherske enkel bokstavregning” og ”omdanne kjente regneregler til algebra” (En læreplan for steinerskolen, *grunnskolen*, s. 17). Her kan vi se en tydelig forskjell mellom den offentlige skolen og Steinerskolen. Jeg oppfatter det slik at individets utvikling i sammenheng med læreplanen ikke blir så godt ivaretatt i den offentlige skolen, fordi forholdet mellom faget og tenkningens utvikling ikke nevnes. Læreplanen viser en nøyaktig, gjennomtenkt og strukturert oppbygning av faget, men ikke slik jeg ser det i forhold til elevenes egenutvikling. For meg er akkurat dette et viktig poeng innenfor algebraundervisning, ja egentlig all undervisning på skolen, fordi det først og fremst må tilrettelegges i forhold til elevenes modningsnivå og ikke en gjennomtenkt fagstruktur. Selv om denne strukturen viser en logisk oppbygning og fungerer også i det praktiske, så mener jeg at det er mer verdifullt å tilpasse læreplanen til barnets modenhet. Selvfølgelig er et slikt utsagn min personlig mening og forståelse, og forslagene til innføring av algebra må sees som et grunnlag for undervisningen og ikke som et ferdigstilt opplegg. Dermed kan jeg si at begge planer har sine fordeler og ulemper, men de må sees i en større sammenheng og tolkes av hver enkelt lærer. Matematikklæreren bør finne en mening og helhet å undervise ut ifra.

6. Konklusjon

Matematikk kan være et verktøy til å strukturere virkeligheten på. Den kan bidra til å utvikle våre tanker og kan skape kreativitet og forståelse. Jeg har behandlet mitt tema ”Matematikkundervisning på Steinerskolen” fokusert på algebraundervisningen. Sentralt i arbeidet med hensyn til innføringen av algebra har vært utviklingen av tenkningen. Først har jeg beskrevet noen viktige faktorer og forutsetninger for at algebraisk matematikk kan innføres. Deretter har jeg belyst de nødvendige forkunnskaper for algebraundervisning og fremstilt en vei hvordan innføringen av algebra på steinerskolen kan se ut. Avslutningsvis har jeg presentert en sammenligning av noen essensielle punkter fra læreplanen i den offentlige skolen og Steinerskolen.

Jeg har beskrevet hvordan utviklingen av tenkningen etter Jean Piaget står i sammenheng og sammenfaller med innføring av algebra i Steinerskolen og bekrefter dermed den faglige oppbygning i Steinerskolens læreplan. En betraktning av barnet i 12-13 års alder ga grunnlaget til det. En relativ stor del av oppgaven berører matematikkens historie. Jeg anser det imidlertid som meget relevant, fordi jeg ser et stort potensiale i en forbindelse mellom matematikk og andre fag på skolen som for eksempel historie og matematikk. Historiekunnskap utdyper matematikk faget og setter matematikkens utvikling i perspektiv etter hvert som ulike emner blir en del av læreplanen for elevene.

Tydelig har det også blitt for meg i denne presentasjonen, hvordan forkunnskaper i matematikk danner et viktig grunnlag for innføringen av algebra. Jeg håper å ha tydeliggjort hvordan matematisk forståelse oppstår fra en intanerlisert aktivitet av sanseerfaringer, og gjennom erfaringer knyttet til rom og tid, auditivt og visuelt. Det lille barnet frigjør seg etter hvert fra sansen slik at barnet kan skape indre begreper som blant annet blir matematisk forståelse. Oppgaven har også bestrebet seg på å tydeliggjøre hvorfor algebra innføres i 7. klasse, nemlig på grunn av at først da har elevene den tilstrekkelige modenhet. Tenkningens utvikling, evne til refleksjon og mulighet for abstrakt tenkning er grunnleggende for forståelsen av algebra.

Også mitt spørsmål, kan innføringen av algebra være en ny vei inn i matematikken, blir etter min mening bekreftet gjennom en beskrivelse av hvordan algebra blir introdusert og hvordan vi dermed repeterer grunnleggende elementer av matematikken. At vi oppdager regelmessigheter og en generaliserende side av matematikken gjennom algebra, har også en viktig funksjon i denne sammenheng. Slik kan vi nærme oss eventuelle eksisterende matematikkvansker hos elevene og kan motvirke dem gjennom en ny forståelse for matematikken i arbeidet med algebra.

I en sammenligning av læreplanen med den offentlige skolen og Steinerskolen ble det tydelig at Steinerskolen tilpasser derfor undervisningen til elevenes modenhet, den offentlige skolen gjør det ikke og begynner med algebraiske begreper tidlig i yngre klasser. I 12 årsalderen modner den selvstendige dømmekraft og innføringen av algebra har muligheten til å understøtte denne modningsprosessen og evnen til abstrakte tanker.

I en sammenfattet betraktning kan jeg sier at innføringen av algebra på Steinerskolen er knyttet til en forståelse av tenkningens utvikling, elevenes evne til abstraksjon og refleksjon og tar generelt hensyn til elevenes modningsnivå. Algebra kan sees som et bruksinstrument for en vei inn i matematikken og kan vekke ny matematisk forståelse i elevene.

Kilder

Aeppli, Willi (2003): *Menneskets sanser*. Oslo: Antropos Forlag A.S.

Bernhard, Arnold (1991): *Algebra für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen.* Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben.

Brun, Viggo (1981): *Alt er tall.* Oslo: Universitetsforlaget.

Dahl, Kristin (1991): *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Fischer & Co.

Furth, Hans G. (1981): *Piaget für Lehrer*. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Harrer, Dorothy (2005): *Math Lessons for Elementary Grades.* Fair Oaks: AWSNA Publications.

Holme, Audun (2007): *Da matematikken ble til*. Oslo: N.W. Damm & Søn.

Jarman, Ron (1998): *Teaching Mathematics in Rudolf Steiner Schools for classes* I-VIII. Stroud: Hawthorn Press.

Kvalvaag, Jakob og Arve Mathisen (2005): *Idé & innhold*. Oslo: Antropos Forlag.

Marstrander, Erik (2001): *Matematikk og geometri 6.klasse – En veiledning i matematikk for steinerskolelærere.* Oslo: Tempo-trykk.

Marstrander, Erik (2003): *Matematikk og geometri 7.klasse – En veiledning i matematikk for steinerskolelærere.* Skedsmo: Tempo-trykk.

Piaget, Jean (1973): *Intelligensens psykologi*. Oslo: J.W. Cappelens Forlag AS.

Nettsteder

En læreplan for steinerskolen – *grunnskolen.* (http://www.steinerskolen.no/filestore/pedagogikk/laereplaner/Lreplanforsteinerskolene2007grunnskolenv12.pdf:) [08.04.2010].

En læreplan for steinerskolen – *Idé og praksis.* (http://www.steinerskolen.no/filestore/pedagogikk/laereplaner/Ide_og_praksis_juli08.pdf) [08.04.2010].

Gleichsatz: *Denken und Sprechen*. (http://www.gleichsatz.de/b-u-t/spdk/wygot1.html) [10.04.2010].

Gronau, Detlef (2009): *Vorlesung zu frühen Geschichte der Mathematik*. (http://www.kfunigraz.ac.at/~gronau/Gm.pdf) [15.02.2010].

Johansson, Toril (2000): *Studenter med spesifikke lese-, skrive-, eller matematikkvansker*: (http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/rapporter_planer/rapporter/2000/studenter-med-spesifikke-lese-skrive-ell.html?id=105558#3) [02.04.2010].

Skolenettet, *Tilpasset opplæring og algebra.* (http://www.skolenettet.no/Web/Veiledninger/Templates/Pages/Article.aspx?id=59099&epslanguage=NO) [27.03.2010].

Utdanningsdirektoratet, *læreplanen i matematik.* (http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=212147&visning=2) [08.04.2010].